

Аналітико-числовий розв'язок задачі вісесиметричного нелінійного деформування циліндричної безмоментної оболонки від дії тиску та зближення країв

В. Б. Минтюк

Побудовано і апробовано геометрично і фізично нелінійну модель безмоментної циліндричної оболонки, яка описує поведінку повітряної амортизаційної подушки з тканинного матеріалу. На основі геометрично точних співвідношень «деформації-переміщення» показано, що рівняння рівноваги оболонки, записані в термінах напружень Біо, разом з граничними умовами мають природний фізичний сенс і є наслідками принципу віртуальної роботи. Фізичні властивості оболонки були описані гіперпружним біологічним матеріалом Фіна тому, що його поведінка схожа з поведінкою текстилю. Для порівняння також були розглянуті більш прості гіперпружні нестискувані матеріали Варга, Нео-Гука, матеріали нульового, першого і другого порядків. Оболонку було навантажено внутрішнім тиском і зближенням країв. Наближений розв'язок побудовано аналітико-числовим методом і показано притаманну цьому методу експоненціальну збіжність і високу точність виконання рівнянь рівноваги. Оскільки похибка не перевищує 1 % при утриманні десяти доданків в апроксимаціях функцій переміщень, то рішення можна вважати практично точним. Проведено аналогічні розрахунки методом скінченного елемента, реалізованого в ANSYS WB, з метою верифікації отриманих результатів. Показано, що відмінності у визначенні переміщень не перевищують 0.2 %, напружень – 4 %. В результаті досліджень встановлено, що використання матеріалів Фіна, Варга, Нео-Гука і матеріалу нульового порядку призводять до схожих значень переміщень і напружень, від яких істотно відрізняються переміщення оболонок з матеріалів першого і другого порядків. Цей результат дозволяє замість матеріалу Фіна, задання якого вимагає значної кількості експериментальних даних, використовувати більш прості – матеріал нульового порядку і матеріал Варга.

Ключові слова: вісесиметрична циліндрична оболонка, геометрична нелінійність, фізична нелінійність, аналітико-числовий метод.

1. Вступ

Для пом'якшення удару при десантуванні на Місяць, Землю чи іншу планету вантажів або важкої техніки застосовуються амортизаційні платформи. Найбільшого поширення завдяки своїй простоті, ефективності, зручності та дешевизні набули платформи з наповненими газом амортизаційними подушками. Під час парашутного десантування на Землю подушки наповнюються атмосферним повітрям завдяки енергії потоку, що набігає. Щоб уникнути відскоку вантажу в період від моменту дотику низу мішка жорсткої поверхні до моменту приземлення платформи, з подушки має вийти все повітря. В цей період у по-

душці створюється значний тиск, який спричиняє суттєві напруження та деформації в матеріалі подушки. Необхідність їх визначення обумовлена потребою розрахунків міцності, об'єму повітря в деформованій подушці і площі контакту подушки з ґрунтом та платформою. Ці параметри є необхідними даними для проектувальних розрахунків амортизаційних систем.

Розрахункова модель амортизаційної подушки представляє собою тонку безмоментну оболонку, яка за рідким виключенням допускає точний розв'язок. Тому на практиці доводиться застосовувати наближені методи – це як правило метод скінченного елемента (МСЕ). Недоліками цього методу є повільна збіжність наближених розв'язків при подрібненні сітки і як наслідок низька їх точність. Цих недоліків позбавлені аналітико-числові методи, які отримали подальший розвиток завдяки використанню в даній роботі. Запровадження в практику розрахунків методів, альтернативних до МСЕ, вже давно назріло.

Задача розрахунку оболонки значно ускладнюється необхідністю моделювання фізично нелінійних характеристик тканинного матеріалу. Особливістю фізичних законів, що моделюють тканину, є велика кількість констант, які характеризують властивості матеріалу. Визначення констант вимагає проведення відповідно великої кількості експериментів на спеціальному обладнанні, що суттєво здорожує розрахунки. Тому обґрунтування на основі числового експерименту можливості використання більш простих матеріалів, завдання яких не потребує значної експериментальної бази, не може бути не актуальним.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

Амортизаційні подушки мають найрізноманітніші форми, типи і конфігурації. У роботі [1] проведено дослідження чотирьох типів подушок і показано, що подушка циліндричної форми з вертикальним розташуванням найбільш ефективна з точки зору співвідношення уповільнення-величина ходу. Динамічну реакцію подушок п'яти різних форм проаналізовано в роботі [2], а в роботі [3] було оптимізовано параметри циліндричної подушки. В цих трьох роботах застосовано спрощене термодинамічне моделювання процесу приземлення, що дозволило отримати аналітичні розв'язки. Недолік такого підходу полягає в тому, що деформування подушок не враховується, а це призводить до похибок в обчисленні об'єму і унеможливорює розрахунки міцності.

Для розрахунку деформацій подушки застосовується модель з відомими, але досить складними рівняннями безмоментної теорії оболонок. Ці рівняння суттєво спрощуються для вісесиметричних оболонок, але для більшості практично важливих задач не допускають точних розв'язків. Точні розв'язки лише при роздуванні таких оболонок базуються на використанні першого інтегралу Піпкіна [4], але для цього матеріал оболонки має бути ізотропним.

Значна кількість розв'язків, представлених в літературі, отримана МСЕ. Порівняння скінченно-елементних розв'язків з експериментальними даними роздування та поздовжньої деформації циліндричної оболонки були проведені в роботі [5]. Тут було використано модель матеріалу Муні-Рівліна. В роботі [6] процес приземлення моделюється за допомогою МСЕ пакету LS-DYNA з метою його подальшої оптимізації. Цей же пакет використовується в робо-

тах [7, 8], де відповідно порівнюється метод корпускулярних частинок з методом контролю об'єму та вивчається вплив масового потоку, обтиснення та товщини подушки безпеки на її ефективність. Як вже відмічалось, такі розв'язки універсальні, але поступаються за точністю аналітико-числовим.

Серед незначної кількості робіт, де використовувались аналітико-числові методи, відмітим роботу [9]. Тут був застосований метод Рітца в зустрічних варіаційних принципах для отримання двосторонніх оцінок у задачі розтягнення циліндричної оболонки з матеріалів Варга та Нео-Гука. Зауважимо, що переміщення такої оболонки не мають значних градієнтів і представляють собою доволі гладкі функції, тому використання степеневого ряду до четвертого порядку для апроксимації переміщень, яке було використане в роботі [9], допустиме. В більш загальному випадку, це може призводити до значних похибок обчислення.

У переважній більшості зазначених робіт використовувались моделі резиноподібних матеріалів, матеріал же амортизаційної подушки являє собою тканину (авіаційний брезент). Для такого матеріалу характерна ортотропія, оскільки основа і уток мають різні механічні характеристики. Це по-перше. По-друге, тканини без покриття реагують на навантаження в напрямку пряжі в два етапи. Оскільки в ненапруженому стані пряжа має хвилясту форму, то спочатку відбувається деформація обтиску при практично нульовому рівні навантаження, а потім, по мірі збільшення рівня навантаження, з'являється додаткова пружна деформація. Ці особливості ускладнюють моделювання такого матеріалу. Так, наприклад, у роботі [10] будується функція додаткової енергії деформації у вигляді степеневої функції від двох напружень (вздовж основи і утка), що включає дев'ять констант. В роботі [11] використано простіший поліном другого порядку, що дозволило легко отримати модулі пружності при заданому рівні напружень. Однак, як у першому випадку, так і в другому результуючі функції неадекватно відображали тестові дані. Використання ортотропної моделі третього порядку (кубічна залежність деформацій від напружень) [12] краще апроксимує експериментальні дані, але потребує визначення 12 констант.

В роботі [13] запропоновано фізичний закон, в якому використовуються експоненціальні функції, показано, що функція енергії деформації наявна але позитивна визначеність матриці жорсткості при значних деформаціях може бути відсутня. Добру кореляцію степеневої моделі матеріалу з експериментальними даними отримано в роботі [14]. Але криві напруження деформації будуються для тканинного матеріалу з покриттям, які дещо відрізняються від кривих для тканин без покриття.

У роботі було використано біологічний гіперпружний матеріал Фіна [15] через те, що діаграми розтягування цього матеріалу і текстилю дуже схожі. Також наведено систематичний вивід співвідношень геометрично нелінійної теорії безмоментних оболонок із використанням деформацій та напружень Біо, тим самим розширено серію робіт автора з застосування цієї пари енергетично спряжених тензорів в класичній нелінійній теорії оболонок [16] та балок [17]. Окрім цього, як показує аналіз літературних даних, аналітико-числові методи майже не застосовуються дослідниками, хоча їх ефективність неодноразово доведена. Прикладами

вдалого їх застосування можуть слугувати розв'язки задач закритичної поведінки пластини під дією рівномірного тиску [18], або зближення країв [19]. Ці методи мають добрі перспективи і будуть застосовані в даному дослідженні.

3. Мета та задачі дослідження

Мета роботи – побудова та обґрунтування адекватної математичної моделі деформування циліндричної оболонки, виготовленої з текстильного матеріалу, та побудова аналітико-числового. Це дасть можливість оперативного отримання високоточних результатів розрахунків з подальшим їх використанням в практиці проектування.

Для досягнення мети ставляться задачі:

- отримати співвідношення «деформації-переміщення», рівняння рівноваги, крайові умови та відповідний їм варіаційний принцип віртуальної роботи;
- визначити фізичний закон, який найбільш точно моделює властивості заданого текстильного матеріалу;
- побудувати аналітико-числовий розв'язок;
- підтвердити достовірність отриманих результатів за допомогою числового експерименту.

4. Матеріали та методи дослідження

Спочатку, виходячи з положень загальної теорії оболонок та нелінійної механіки суцільного середовища, будуються співвідношення «деформації-переміщення», та формулюються рівняння рівноваги напружень Біо. Ці ж рівняння отримуються безпосереднім проектуванням сил та з принципу віртуальної роботи, що підтверджує їх достовірність. Константи в функції стану гіперпружного біологічного матеріалу Фіна визначаються методом колокації по експериментальним даним, наведеним в літературі. Аналітико-числовий метод використовується для побудови наближеного розв'язку. Точність розв'язків оцінюється по величині нев'язки в рівняннях рівноваги. Достовірність розв'язків підтверджується шляхом їх порівняння з скінчено-елементними розв'язками, отриманими за допомогою програмного забезпечення ANSYS WB.

5. Результати дослідження фізично та геометрично нелінійного вісесиметричного деформування циліндричної оболонки

5. 1. Співвідношення геометрично нелінійного вісесиметричного деформування циліндричної оболонки

Серединна поверхня недеформованої циліндричної оболонки задається радіус-вектором r , компоненти якого в прямокутній декартовій системі координат мають вигляд (рис. 1):

$$\mathbf{r} = \left\{ r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r}, z \right\}^T, \quad (1)$$

де r – радіус оболонки; s – дугова координата.

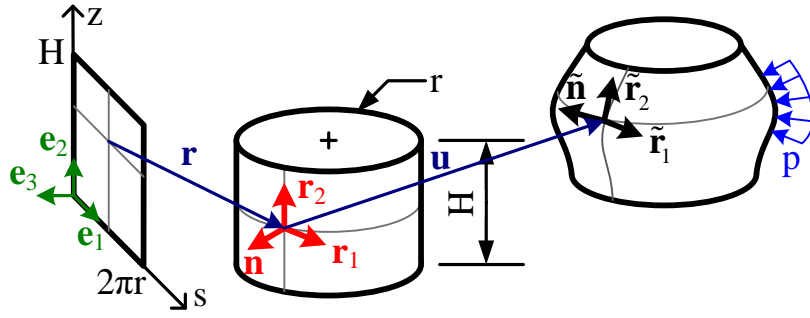


Рис. 1. Розміри, параметризація та деформація циліндричної оболонки

Дотичні вектори r_α і вектор нормалі \mathbf{n} (рис. 1) визначаються за формулами:

$$\mathbf{r}_1 = \partial_1 \mathbf{r} = \cos \frac{s}{r} \mathbf{e}_1 - \sin \frac{s}{r} \mathbf{e}_3;$$

$$\mathbf{r}_2 = \partial_2 \mathbf{r} = \mathbf{e}_2;$$

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \sin \frac{s}{r} \mathbf{e}_1 + \cos \frac{s}{r} \mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{n}, \quad (2)$$

де введено позначення $\partial_1(*) \equiv \frac{\partial(*)}{\partial s}$, $\partial_2(*) \equiv \frac{\partial(*)}{\partial z}$.

Надалі розрізняти коваріантні і контраваріантні компоненти тензорів немає необхідності, оскільки r_i утворюють ортонормований базис, який, звідно, співпадає зі взаємним, тобто перший фундаментальний тензор поверхні є тотожним

$$\mathbf{G} = \{g_{ij}\} = \{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j\} = \{g^{ij}\} = \{\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j\} = 1.$$

Усі символи Кристофеля виявляються рівними нулю, а формули Гаусса і Вейнгартена набувають виду

$$\partial_1 \mathbf{r}_1 = -\frac{\mathbf{n}}{r}; \quad \partial_1 \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_1}{r}. \quad (3)$$

Отже, похідна деякого довільного векторного поля $\eta = \eta_\beta r_\beta + \eta_3 n$ обчислюється за формулами

$$\partial_1 \eta = \left(\partial_1 \eta_1 + \frac{\eta_3}{r} \right) r_1 + \partial_1 \eta_2 r_2 + \left(\partial_1 \eta_3 - \frac{\eta_1}{r} \right) n;$$

$$\partial_2 \eta = \partial_2 \eta_1 r_1 + \partial_2 \eta_2 r_2 + \partial_2 \eta_3 n. \quad (4)$$

У випадку вісесиметричного деформування оболонки вектор переміщення \mathbf{u} буде мати лише дві ненульові компоненти

$$\mathbf{u} = v \mathbf{r}_2 + w \mathbf{n}, \quad (5)$$

де v і w – переміщення, які задаються функціями однієї змінної – z , похідна по якій далі буде позначатися $\partial_2 f \equiv \frac{\partial f}{\partial z} \equiv f'$.

Тензор градієнту деформації з урахуванням правил диференціювання (4) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = 1 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = & \left(1 + \frac{w}{r}\right) \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1 + (1 + v') \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_2 - \\ & - k \left(1 + \frac{w}{r}\right) \left(w' \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 + (1 + v') \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3\right) + w' \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_2, \end{aligned} \quad (6)$$

де k – нормувальний множник деформованої нормалі $\tilde{\mathbf{n}}$ (рис. 1). У випадку застосування гіпотези незмінності об'єму k визначається з умови $\det(\mathbf{F})=1$

$$k = \left[\left(1 + \frac{w}{r}\right)^2 \left((w')^2 + (1 + v')^2\right) \right]^{-1}. \quad (7)$$

Полярне розкладення тензору деформацій $\mathbf{F} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Lambda}$ призводить до визначення головних подовжень і компонент тензору жорсткого повороту

$$\mathbf{\Lambda} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}} = \lambda_1 \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1 + \lambda_2 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_2 + \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1} \mathbf{n} \mathbf{n}; \quad (8)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Lambda}^{-1} = \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1 + \cos \beta \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_2 - \sin \beta \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 + \sin \beta \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_2 + \cos \beta \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3, \quad (9)$$

де λ_1, λ_2 – головні подовження:

$$\lambda_1 = 1 + \frac{w}{r}; \quad \lambda_2 = \sqrt{(w')^2 + (1 + v')^2}; \quad (10)$$

$$\cos \beta = \frac{1 + v'}{\lambda_2}; \quad \sin \beta = \frac{w'}{\lambda_2}; \quad (11)$$

β – кут повороту деформованої нормалі.

Деформації оболонки в залежності від вибраної міри записуються як функції головних подовжень. Надалі будуть використовуватись:

– логарифмічна міра (деформації Генкі)

$$\varepsilon_{\alpha}^0 = \ln \lambda_{\alpha}; \quad (12)$$

– міра першого порядку (деформації Біо)

$$\varepsilon_{\alpha} = \lambda_{\alpha} - 1; \quad (13)$$

– міра другого порядку (деформація Коші-Гріна)

$$\varepsilon_{\alpha} = 0.5(\lambda_{\alpha}^2 - 1). \quad (14)$$

Рівняння рівноваги елемента оболонки у разі використання міри деформацій Біо (13) набудуть вигляду

$$\begin{cases} -(N_2 \sin \beta)' + \frac{N_1}{r} = p_n; \\ -(N_2 \cos \beta)' = p_z, \end{cases} \quad (15)$$

де $N_{\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha} dr$ – статичні еквіваленти напружень Біо (погонні сили);

$p_n = p \lambda_1 \lambda_2 \cos \beta$, $p_z = -p \lambda_1 \lambda_2 \sin \beta$ – проекції внутрішнього тиску p у перерахунку на деформовану серединну поверхню.

Рівняння (15) можна отримати різними шляхами. Наприклад, спрощуючи відомі тривимірні рівняння [20]

$$\nabla \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S})^T + \rho \mathbf{f} = 0,$$

де $\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_{\alpha} A_{\alpha\beta} \mathbf{r}_{\beta}$;

S – тензор напружень Біо;

ρf – інерційне навантаження, яким у двовимірному формулюванні задачі можна моделювати тиск.

До рівнянь (15) призводить безпосереднє проектування сил (рис. 2):

– на нормаль n

$$(N_2 + dN_2) dr_1 \sin(\beta + d\beta) - N_2 dr_1 \sin \beta - 2N_1 dr_2 \sin\left(\frac{dr_1}{2r}\right) + p_n dr_1 dr_2 = 0;$$

– на вертикальну вісь

$$(N_2 + dN_2) dr_1 \cos(\beta + d\beta) - N_2 dr_1 \cos(\beta) + p_z dr_1 dr_2 = 0.$$

Вважаючи для малих величин $\sin d\beta = d\beta$, $\cos d\beta = 1$, $\sin \frac{dr_2}{2r} = \frac{dr_2}{2r}$, а також нехтуючи доданками більш високого порядку малості, приходимо до рівнянь (15).

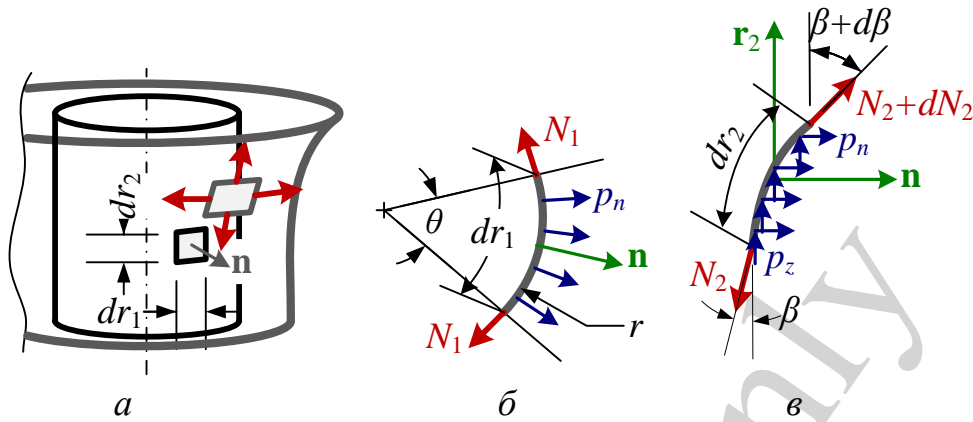


Рис. 2. Рівновага деформованого елемента оболонки: *a* – положення елемента оболонки; *б* – вид зверху; *в* – вид збоку

Також рівняння рівноваги можна отримати з принципу віртуальної роботи:

$$0 = \delta A = \int_V \mathbf{S} \cdot \delta \Lambda dV - \int_{\Sigma} \mathbf{p} \cdot \delta u d\Sigma = 2\pi r \int_H (N_1 \delta \lambda_1 + N_2 \delta \lambda_2 - p_n \delta w - p_z \delta v) dz. \quad (16)$$

Якщо підставити в (16) варіації подовжень (10)

$$\delta \lambda_1 = \frac{\delta w}{r};$$

$$\delta \lambda_2 = \frac{w'}{\lambda_2} \delta w' + \frac{1+v'}{\lambda_2} \delta v' = \delta w' \sin \beta + \delta v' \cos \beta,$$

та шляхом інтегрування частинами позбавитись похідних під знаком варіації, отримаємо

$$\int_H \left\{ \left[\frac{N_1}{r} - (N_2 \sin \beta)' - p_n \right] \delta w - \left[(N_2 \cos \beta)' + p_z \right] \delta v \right\} dz + \left\{ [N_2 \sin \beta] \delta w + [N_2 \cos \beta] \delta v \right\}_{z=0,H} = 0.$$

У силу незалежності варіацій виконання цієї рівності можливо тільки коли нулю дорівнює кожний доданок у квадратних дужках. Так, приходимо до рівнянь рівноваги (15) і можливим крайовим умовам при $z=0$ і $z=H$:

$$N_2 \sin \beta = 0 \quad \vee \quad \delta w = 0;$$

$$N_2 \cos \beta = 0 \quad \vee \quad \delta v = 0. \quad (17)$$

Зазначимо, що в принципі віртуальної роботи (16) було використано енергетично спряжену пару «деформації Біо» (13) – «напруження Біо». У випадку застосування інших мір деформацій (12) або (14) у (16) потрібно $\delta \lambda_\alpha$ замінити на $\lambda_\alpha^{-1} \delta \lambda_\alpha$ та $\lambda_\alpha \delta \lambda_\alpha$ відповідно. При цьому, роботу будуть чинити напруження Кірхгофа (повернуті) та Піюлі-Кірхгофа другого роду.

Отже, встановлені співвідношення «переміщення-деформації» (10), (12)–(14), сформульована крайова задача (рівняння рівноваги (15) та крайові умови (17)) і відповідна їй слабка постановка (16). Для замикання системи рівнянь необхідні співвідношення «деформації-напруження».

5. 2. Фізично нелінійний ортотропний матеріал

Функція стану біологічного матеріалу Фіна задається виразом [15]

$$2U = \alpha_1 \varepsilon_1^2 + \alpha_2 \varepsilon_2^2 + 2\alpha_4 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + c e^{a_1 \varepsilon_1^2 + a_2 \varepsilon_2^2 + 2a_4 \varepsilon_1 \varepsilon_2}, \quad (18)$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, c, a_1, a_2$ та a_4 – константи, що визначають властивості матеріалу;

$\varepsilon_\alpha = \lambda_\alpha - 1$ – головні деформації тензору Біо (13).

Константи в (18) визначались методом колокації, як це рекомендовано в [15], за експериментальними даними, наведеними в [12, 21–23]. В результаті чого отримано наступні значення: $\alpha_1 = -180.9$ кНм, $\alpha_2 = -56.3$ кНм, $\alpha_4 = -99.2$ кНм, $c = 12.2$ кНм, $a_1 = 15.8$, $a_2 = 6.3$, $a_4 = 8.1$.

Залежність погонних сил

$$N_1 = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_1} = \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_4 \varepsilon_2 + c (a_1 \varepsilon_1 + a_4 \varepsilon_2) e^{a_1 \varepsilon_1^2 + a_2 \varepsilon_2^2 + 2a_4 \varepsilon_1 \varepsilon_2},$$

$$N_2 = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_2} = \alpha_2 \varepsilon_2 + \alpha_4 \varepsilon_1 + c (a_2 \varepsilon_2 + a_4 \varepsilon_1) e^{a_1 \varepsilon_1^2 + a_2 \varepsilon_2^2 + 2a_4 \varepsilon_1 \varepsilon_2} \quad (19)$$

від деформацій при різному їх співвідношенні показано на рис. 3.

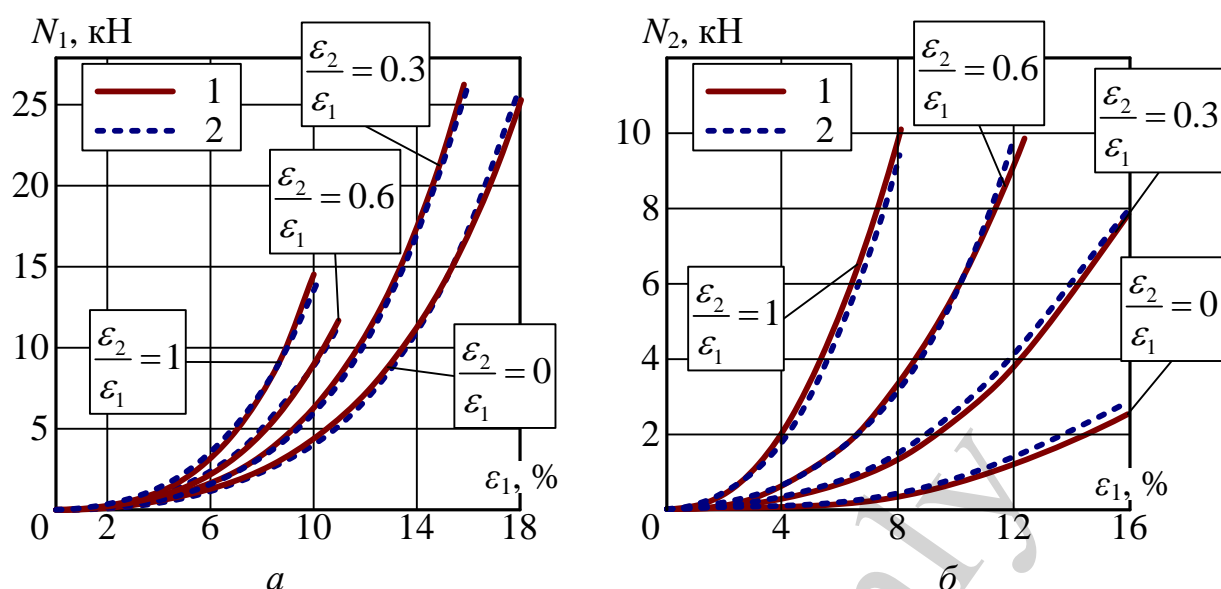


Рис. 3. Моделювання експериментальних даних: *a* – залежність погонної сили N_1 від деформації; *б* – залежність погонної сили N_2 від деформації; 1 – функція стану (18); 2 – експериментальні дані [22]

Для порівняння даного матеріалу з іншими будуть розглянуті гіперпружні матеріали:

– Варга [24]

$$U_V = 2\bar{\mu} \left(\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_2 \lambda_1} - 3 \right); \quad N_1 = 2\bar{\mu} \left(1 - \frac{1}{\lambda_2 \lambda_1^2} \right);$$

$$N_2 = 2\bar{\mu} \left(1 - \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2^2} \right); \quad (20)$$

– Нео-Гука

$$U_{NH} = \bar{\mu} \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_2^2 \lambda_1^2} - 3 \right); \quad \tilde{N}_1 = \bar{\mu} \left(1 - \frac{1}{\lambda_2^2 \lambda_1^4} \right);$$

$$\tilde{N}_2 = \bar{\mu} \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^4} \right); \quad (21)$$

– лінійні матеріали нульового, першого та другого порядків

$$U_0 = 2\bar{\mu} (\ln \lambda_1 \ln \lambda_2 + \ln^2 \lambda_1 + \ln^2 \lambda_2);$$

$$\hat{N}_1 = 2\bar{\mu}(2\ln \lambda_1 + \ln \lambda_2); \quad \hat{N}_2 = 2\bar{\mu}(2\ln \lambda_2 + \ln \lambda_1); \quad (22)$$

$$U_1 = 2\bar{\mu}(\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 - 3(\lambda_1 + \lambda_2 - 1));$$

$$N_1 = 2\bar{\mu}(2\lambda_1 + \lambda_2 - 3); \quad N_2 = 2\bar{\mu}(2\lambda_2 + \lambda_1 - 3); \quad (23)$$

$$U_2 = \frac{\bar{\mu}}{2}(\lambda_1^4 + \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^4 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 1));$$

$$\check{N}_1 = \bar{\mu}(2\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 3); \quad \check{N}_2 = \bar{\mu}(2\lambda_2^2 + \lambda_1^2 - 3); \quad (24)$$

де $\bar{\mu} = \mu h$ – погонний модуль зсуву;

$\check{N}_\alpha = N_\alpha \lambda_\alpha$, $\hat{N}_\alpha = N_\alpha \lambda_\alpha^{-1}$ – статичні еквіваленти напружень Піоли-Кірхгофа другого роду та повернутих напружень Кірхгофа.

5. 3. Аналітико-числовий розв’язок

Шукані функції переміщень $v(z)$ і $w(z)$ ($z = -H/2 \dots H/2$) у випадку задання не-однорідних головних крайових умов (17) будуються у вигляді сум

$$v(z) = V_{01}\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{H}\right) + V_{02}\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{H}\right) + \sum_{i=0} V_i \varphi_i(z);$$

$$w(z) = W_{01}\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{H}\right) + W_{02}\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{H}\right) + \sum_{i=0} W_i \psi_i(z). \quad (25)$$

де V_{01} , V_{02} , W_{01} , W_{02} – задані на границі величини переміщень;

V_i , W_i – коефіцієнти, які будуть визначені за допомогою варіаційних методів; $\varphi_i(z)$, $\psi_i(z)$ – відомі базисні функції.

В якості базисних беруться функції, похідні від яких ортогональні в метриці L_2 [25, 26]

$$\varphi_i(z) = \psi_i(z) = P_{i+2}\left(\frac{2z}{H}\right) - P_i\left(\frac{2z}{H}\right). \quad (26)$$

Тут P_i – поліноми Лежандра.

Коефіцієнти в сумах (25) визначаються шляхом розв’язку системи нелінійних алгебраїчних рівнянь, до яких приводить принцип віртуальної роботи (16). Система рівнянь розв’язується методом Ньютона.

5. 4. Числовий експеримент

В якості тестової задачі розглянуто циліндричну оболонку під внутрішнім тиском, краї якої зближуються. Розміри оболонки: $H=0.77$ м, $r=0.53$ м. Умовна товщина, що вираховується як відношення щільності до маси квадратного метру, дорівнює $h=0.804$ мм. Величина внутрішнього тиску складає $p=100$ кПа, зближення країв – $\Delta=0.35$ м. У випадку використання матеріалів (20)–(24) модуль зсуву $\mu=92.248$ МПа ($\bar{\mu}=74.208$ кН/м), що відповідає зусиллю 1.78 кН при розтягуванні полоси шириною 5 см на 16 %.

Оскільки буде утворюватися наближений розв'язок, то перш за все потрібно оцінити збіжність та точність отриманих результатів. На рис. 4, а показана збіжність максимального прогину оболонки w , та максимальної величини зусилля N_1 в залежності від кількості невідомих коефіцієнтів K в сумах (25). За еталонні значення було взято відповідні величини при верхньому індексі в сумах рівному 12. Оскільки рішення доволі гладкі, то маємо очікувану експоненціальну збіжність. На рис. 4, б показані нев'язки в рівняннях рівноваги (15). Як можна бачити, їх найбільше значення не перевищує 1 % при утриманні 10 доданків в сумах (25) ($K=20$), тобто наближений розв'язок можна вважати майже точним.

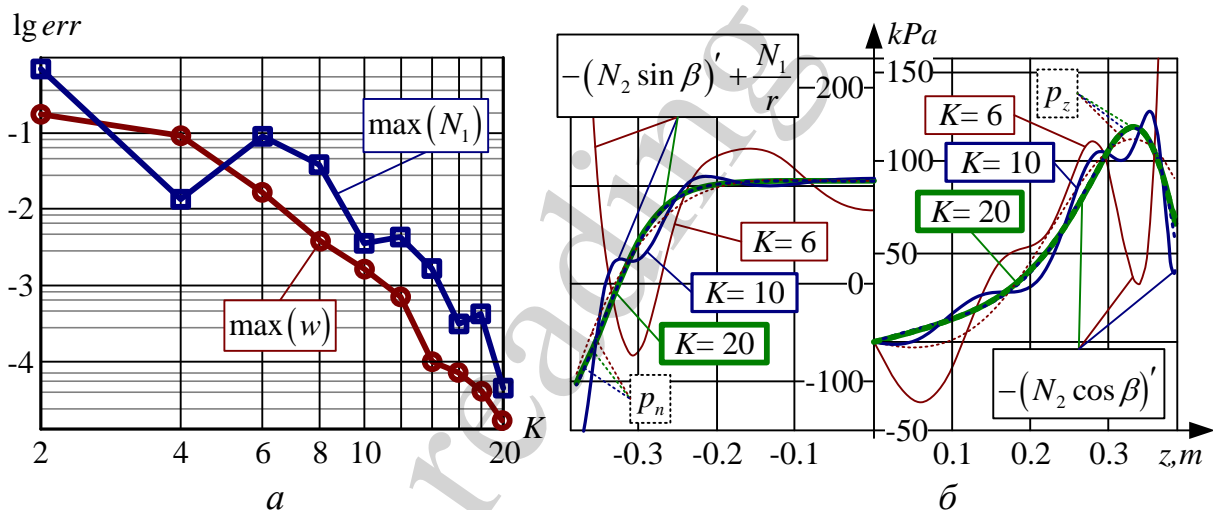


Рис. 4. Збіжність та точність наближеного розв'язку: а – залежність похибки визначення максимальних прогину та напружень; б – значення лівих та правих частин рівнянь рівноваги (15) при утриманні 6, 10, та 20 невідомих в сумах (25)

Достовірність отриманих результатів підтверджується порівнянням прогинів та зусиль отриманих запропонованим методом та МСЕ, реалізованому в програмному забезпеченні ANSYS WB [27]. Відносна різниця у визначенні переміщень не перевищує 0.2 %, напружень – 4 %.

Деформовані меридіани циліндричної оболонки при використанні різних матеріалів показано на рис. 5. Як можна бачити, використання лінійних матеріалів першого та другого порядків приводить до зменшення прогинів і збільшення поздовжніх переміщень. Зазначимо, що ці матеріали не є нестисливими, хоча коефіцієнт Пуассона і заданий рівним 0.5. Для решти матеріалів гіпотеза нестисливості справедлива, деформування оболонок з цих матеріалів схоже.

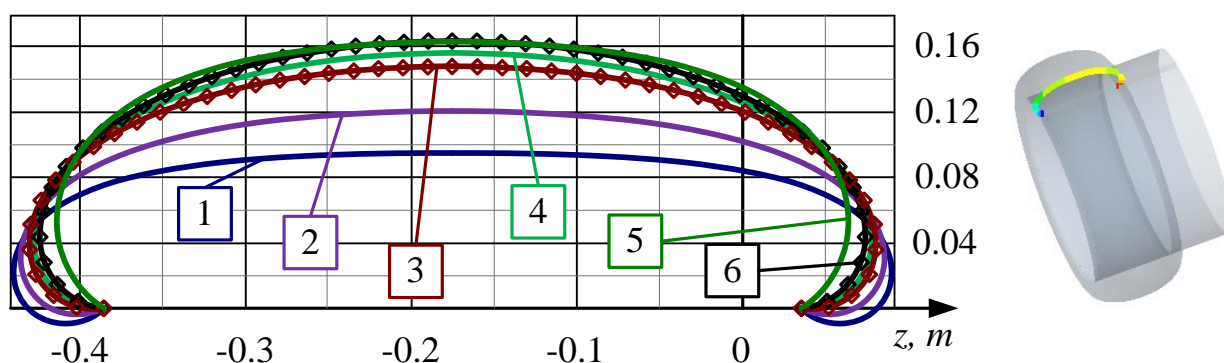


Рис. 5. Деформовані меридіани циліндричної оболонки: 1 – лінійний матеріал другого порядку (24); 2 – лінійний матеріал першого порядку (23); 3 – неогуківський матеріал (21), ANSYS WB; 4 – матеріал Варга (20); 5 – матеріал Фіна (18); 6 – лінійний матеріал нульового порядку (22), ANSYS WB

Аналогічна закономірність спостерігається і для розподілу погонних сил (рис. 6). Для порівняння всі сили були приведені до статичних еквівалентів умовних напружень, тобто напруження Піюлі-Кірхгофа перераховані по формулі $\lambda_{\alpha}^{-1} \tilde{N}_{\alpha}$, повернуті напруження Кірхгофа – $\lambda_{\alpha} \tilde{N}_{\alpha}$.

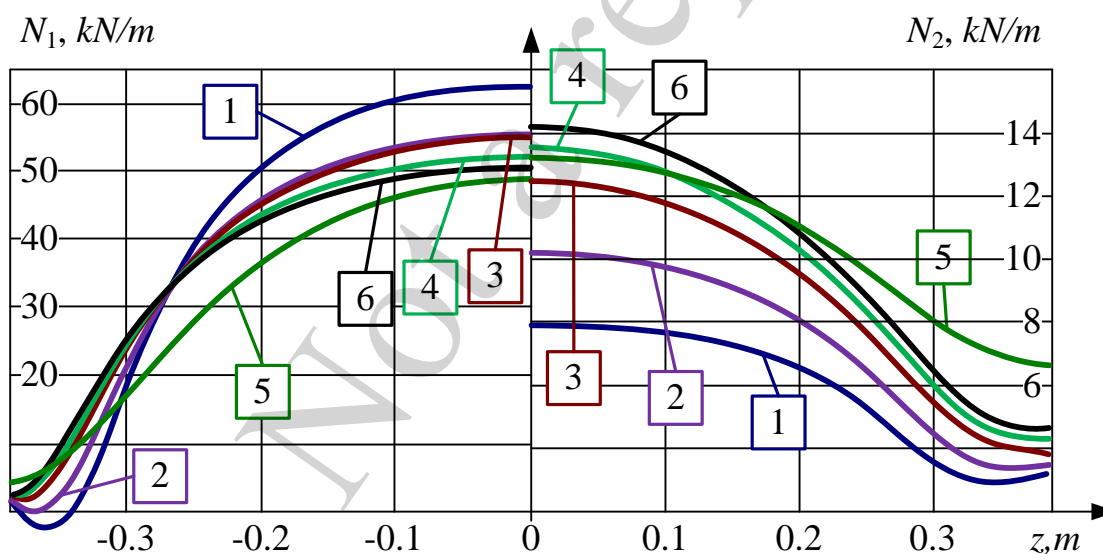


Рис. 6. Розподіл мембранних сил в циліндричній оболонці: 1 – лінійний матеріал другого порядку (24); 2 – лінійний матеріал першого порядку (23); 3 – неогуківський матеріал (21), ANSYS WB; 4 – матеріал Варга (20); 5 – матеріал Фіна (18); 6 – лінійний матеріал нульового порядку (22), ANSYS WB

Як можна бачити, лінійний матеріал другого порядку призводить до суттєво завищених величин окружних напружень і зниженню меридіональних. Окружні напруження в оболонці з лінійного матеріалу першого порядку майже

співпадають з напруженнями в неогуківській оболонці, але меридіональні напруження занижені.

Податливість матеріалу Фіна при малих деформаціях найбільше позначається в зонах біля країв оболонки (рис. 5). В цих зонах оболонка менш завантажена (рис. 6), тому й різниця у величинах переміщень і напружень більш суттєва. Якщо ставиться задача визначення максимальних деформацій та напружень, то заміна матеріалу Фіна на матеріал нульового порядку призводить до похибки у визначенні максимального прогину в 0.2 % и максимального напруження – в 3 %.

6. Обговорення результатів дослідження деформування оболонки

Простота і наочність геометрично нелінійних співвідношень (15)–(17), обумовлена використанням енергетично спряженої пари тензорів напружень та деформацій Біо (13), які мають чітку інженерну інтерпретацію: умовні напруження та відносне подовження. Висока точність наближеного розв'язку (рис. 4) пояснюється застосуванням аналітико-числового методу з поліноміальною апроксимацією функцій переміщень (25). Для отримання практично точного розв'язку знадобилось введення 20 невідомих, це майже на порядок менше в порівнянні з МСЕ (з розміром елемента 10 мм і квадратичною інтерполяцією).

Схожість форм деформованої оболонки з різних матеріалів (рис. 5) можна пояснити схожими фізичними властивостями цих матеріалів в заданій зоні «напруження-деформації». Майже весь матеріал оболонки знаходиться в максимально напруженій зоні, окрім зон на краях оболонки (рис. 6), де і відмінності у деформаціях більші (рис. 5).

Особливості поведінки текстилю добре моделюються біологічним гіперпружним матеріалом Фіна (18), (19). Недоліком використання цього матеріалу є необхідність значної кількості експериментальних даних. Можлива заміна цього матеріалу більш простими: одноконстантними матеріалами нульового порядку (22) і Варга (20), що не приводить до суттєвих похибок у визначенні переміщень і напружень. Використання матеріалу другого порядку (24) суттєво завищує жорсткість оболонки, в результаті чого з'являються значні похибки як у визначенні переміщень, так і у визначенні напружень. Його застосування в задачах такого типу небажане.

При суттєвому стисканні оболонки або зменшеному тиску з'являються від'ємні значення напружень, що для тканин недопустимо. Це обмежує застосування даної моделі. Утворення складок моделюється або оболонками з ненульовою згинальною жорсткістю, що суттєво ускладнює модель, або спрощено – шляхом введення функції енергії розслабленої деформації [28].

Недоліком даного дослідження є неврахування нелінійності третього типу – контактної. При посадці подушка неминуче вступає в контакт з ґрунтом, платформою або з сусідніми подушками. Неврахування цих явищ може суттєво відобразитись на результатах.

Зняття відмічених обмежень та усунення недоліків вказують напрямки подальшого розвитку даного дослідження.

7. Висновки

1. Геометрично нелінійні співвідношення побудовані в термінах деформацій та напружень Біо, тобто звичних відносних подовжень і умовних напружень. Перевага їх використання полягає, по-перше, в зручності обробки експериментальних даних, по-друге, в зрозумілій інтерпретації рівнянь рівноваги, що й показано в роботі. Основний недолік використання цієї пари (необхідність добування кореня з квадрату тензора градієнта деформації) в даному випадку не суттєвий. Точні вирази компонент тензору подовжень і повороту мають компактний вид, не потребують ніяких спрощень і їх подальше використання приводить до геометрично точних рівнянь рівноваги, крайових умов та варіаційних принципів.

2. Матеріал Фіна враховує ортотропію і добре корелює з даними експериментів по двовісному розтягуванні тканинних матеріалів. Розбіжність між експериментальними та апроксимованими значеннями напружень менше 8 %.

3. Ортогональність похідних функції, які були використані при побудові аналітико-числових розв'язків, в метриці L_2 приводить до добре обумовлених матриць в енергетичній метриці диференційного оператора даної крайової задачі. Нев'язка в рівняннях рівноваги не перевищує 1 % при утриманні десяти доданків в апроксимаціях функцій переміщень, тобто отримані розв'язки можна вважати практично точними.

4. Достовірність підтверджена шляхом порівняння отриманих результатів з результатами, отриманими МСЕ. Відмінності у визначенні переміщень не перевищують 0.2 %, напружень – 4 %.

Подяка

Це дослідження підтримується Міністерством освіти і науки України в рамках науково-дослідного проекту № 0121U109604.

Література

1. Esgar, J. B., Morgan, W. C. (1960). Analytical Study of Soft Landings on Gas-filled Bags. NASA TR R-75. U.S. Government Printing Office, 30. URL: https://books.google.com.ua/books/about/Analytical_Study_of_Soft_Landings_on_Gas.html?id=k28A2nzFGVoC&redir_esc=y
2. Alizadeh, M., Sedaghat, A., Kargar, E. (2014). Shape and Orifice Optimization of Airbag Systems for UAV Parachute Landing. International Journal of Aeronautical and Space Sciences, 15 (3), 335–343. doi: <https://doi.org/10.5139/ijass.2014.15.3.335>
3. Zhou, X., Zhou, S. M., Li, D. K. (2019). Optimal Design of Airbag Landing System without Rebound. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 531, 012001. doi: <https://doi.org/10.1088/1757-899x/531/1/012001>
4. Pipkin, A. C. (1968). Integration of an equation in membrane theory. Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik ZAMP, 19 (5), 818–819. doi: <https://doi.org/10.1007/bf01591012>
5. Pamplona, D. C., Gonçalves, P. B., Lopes, S. R. X. (2006). Finite deformations of cylindrical membrane under internal pressure. International Journal

of Mechanical Sciences, 48 (6), 683–696. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2005.12.007>

6. Wang, H., Hong, H., Hao, G., Deng, H., Rui, Q., Li, J. (2014). Characteristic verification and parameter optimization of airbags cushion system for airborne vehicle. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 27 (1), 50–57. doi: <https://doi.org/10.3901/cjme.2014.01.050>

7. Zhou, M., Di, C., Yang, Y. (2017). Simulation of Cushion Characteristic of Airbags Based on Corpuscular Particle Method. Proceedings of the 2017 2nd International Conference on Automation, Mechanical Control and Computational Engineering (AMCCE 2017). doi: <https://doi.org/10.2991/amcce-17.2017.34>

8. Li, Y., Xiao, S., Yang, B., Zhu, T., Yang, G., Xiao, S. (2018). Study on the influence factors of impact ejection performance for flexible airbag. Advances in Mechanical Engineering, 10 (10), 168781401880733. doi: <https://doi.org/10.1177/1687814018807333>

9. Haddow, J. B., Favre, L. Ogden, R. W. (2000). Application of variational principles to the axial extension of a circular cylindrical nonlinearly elastic membrane. Journal of Engineering Mathematics 37, 65–84. doi: <https://doi.org/10.1023/A:1004709622104>

10. Chen, Y., Lloyd, D. W., Harlock, S. C. (1995). Mechanical Characteristics of Coated Fabrics. Journal of the Textile Institute, 86 (4), 690–700. doi: <https://doi.org/10.1080/00405009508659045>

11. Yang, B., Yu, Z., Zhang, Q., Shang, Y., Yan, Y. (2020). The nonlinear orthotropic material model describing biaxial tensile behavior of PVC coated fabrics. Composite Structures, 236, 111850. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111850>

12. Farboodmanesh, S., Chen, J., Tao, Z., Mead, J., Zhang, H. (2019). Base fabrics and their interaction in coated fabrics. Smart Textile Coatings and Laminates, 47–95. doi: <https://doi.org/10.1016/b978-0-08-102428-7.00003-1>

13. Hegyi, D., Halász, M., Molnár, K., Szebenyi, G., Sipos, A. A. (2017). An elastic phenomenological material law for textile composites and it's fitting to experimental data. Journal of Reinforced Plastics and Composites, 36 (18), 1343–1354. doi: <https://doi.org/10.1177/0731684417707586>

14. Wang, C., Cao, X., Shen, H. (2021). Experimental and Numerical Investigation of PA66 Fabrics Coated/Uncoated PVC by Biaxial Tensile Tests. Fibers and Polymers, 22 (8), 2194–2205. doi: <https://doi.org/10.1007/s12221-021-0122-y>

15. Fung, Y.-C. (1993). Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues. Springer, 568. doi: <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2257-4>

16. Myntiuk, V. B. (2018). Biot Stress and Strain in Thin-Plate Theory for Large Deformations. Journal of Applied and Industrial Mathematics, 12 (3), 501–509. doi: <https://doi.org/10.1134/s1990478918030109>

17. Khalilov, S. A., Myntiuk, V. B. (2018). Postbuckling Analysis of Flexible Elastic Frames. Journal of Applied and Industrial Mathematics, 12 (1), 28–39. doi: <https://doi.org/10.1134/s1990478918010040>

18. Myntiuk, V. B. (2020). Postbuckling of a Uniformly Compressed Simply Supported Plate with Free In-Plane Translating Edges. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 14 (1), 176–185. doi: <https://doi.org/10.1134/s1990478920010160>
19. Kravchenko, S. G., Myntiuk, V. (2020). Nonlinear Postbuckling Behavior of a Simply Supported, Uniformly Compressed Rectangular Plate. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, 35–44. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-030-37618-5_4
20. Reddy, J. N. (2013). *An Introduction to Continuum Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 450. doi: <https://doi.org/10.1017/cbo9781139178952>
21. Day, A. S. (1986). Stress strain equations for non-linear behaviour of coated woven fabrics. *IASS Symposium Proceedings: Shells, Membranes and Space Frames*, 17–24.
22. Kawabata, S., Niwa, M., Kawai, H. (1973). 3–The Finite-Deformation Theory of Plain-Weave Fabrics Part I: the Biaxial-Deformation Theory. *The Journal of The Textile Institute*, 64 (1), 21–46. doi: <https://doi.org/10.1080/00405007308630416>
23. Buet-Gautier, K., Boisse, P. (2001). Experimental analysis and modeling of biaxial mechanical behavior of woven composite reinforcements. *Experimental Mechanics*, 41 (3), 260–269. doi: <https://doi.org/10.1007/bf02323143>
24. Varga, O. H. (1966). *Stress-strain Behavior of Elastic Materials*. Interscience Publishers, 190.
25. Shen, J. (1994). Efficient Spectral-Galerkin Method I. Direct Solvers of Second- and Fourth-Order Equations Using Legendre Polynomials. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 15 (6), 1489–1505. doi: <https://doi.org/10.1137/0915089>
26. Минтюк, В. (2007). Ортонормированный базис для одномерных краевых задач. *Авиационно-космическая техника и технология*, 5 (41), 32–36. URL: <http://nti.khai.edu:57772/csp/nauchportal/Arhiv/AKTT/2007/AKTT507/Mintjuk.pdf>
27. Ansys®. *Academic Research Mechanical*, Release 21.2. URL: <https://www.ansys.com/>
28. Tait, R., Connor, P. (1997). On the expansion of a deformed cylindrical elastic membrane. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 59 (3), 231–243. doi: <https://doi.org/10.1093/imamat/59.3.231>